

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1970-008 SEPTEMBER

P. MULLENDER
OVER GETALLEN

VOORDRACHT IN DE SERIE "ELEMENTAIRE ONDERWERPEN
VANUIT HOGER STANDPUNT BELICHT"

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Over Getallen
=====

1. Notaties

In het volgende duiden we de verzameling der natuurlijke getallen aan met N , die der gehele getallen met G , die der reële getallen met R en die der complexe getallen met C .

Steeds is

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{en} \quad e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Voorts

$$K = \{ae + \frac{b}{e} : a \in G, b \in G\},$$

$$E = \{xe + \frac{y}{e} : x \in R, y \in R, 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}.$$

We merken op dat $\frac{1}{e} = \bar{e}$ (de toegevoegd complexe van e). Voorts, dat K een ring zonder nuldelers is en het quotientenlichaam van K algebraïsch over het lichaam van de rationale getallen is, dat daaruit ontstaat door adjunctie van e ; K is de ring der gehelen in die algebraïsche lichaamsuitbreiding. Tenslotte, dat E het parallelogram in het complexe vlak is met hoekpunten 0 , e , $\bar{e}$ en 1 , waarbij van de rand alleen de zijden die in 0 samenkomen zijn opgenomen met uitzondering van e en $\bar{e}$.

Definieren we $\forall c \in C: E_c = \{c + z : z \in E\}$, dan is

$$\bigcup \{E_c : c \in K\} = C. \quad (1)$$

2. De algorithmus van Euclides

De algorithmus van Euclides dient ter bepaling van de g.g.d. van twee gehele getallen. De methode kan echter, be-

halve in G , ook toegepast worden in K . Eerst in G :

Stel $p \in G$ en $q \in G$. We gaan aldus tewerk:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}, \text{ dus } p = a_0 q + r_0 \quad (a_0 \in G, r_0 \in G, 0 \leq \frac{r_0}{q} < 1);$$

als $r_0 = 0$, kunnen we niet verder, maar als $r_0 \neq 0$, stellen we

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \text{ dus } q = a_1 r_0 + r_1 \quad (a_1 \in N, r_1 \in G, 0 \leq \frac{r_1}{r_0} < 1);$$

als $r_1 = 0$, gaan we niet verder, maar als $r_1 \neq 0$, stellen we

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \text{ dus } r_0 = a_2 r_1 + r_2 \quad (a_2 \in N, r_2 \in G, 0 \leq \frac{r_2}{r_1} < 1)$$

etc..

Na een eindig aantal stappen breekt het procédé af, daar $|q| > |r_0| > |r_1| > \dots$ en er slechts eindig veel gehele getallen zijn met absolute waarde kleiner dan $|q|$. Indien voor zekere $n \in N$ geldt $r_n = 0$, dan is r_{n-1} (of $|r_{n-1}|$, als men dat prefereert) de g.g.d. van p en q .

We merken op dat men meestal $q \in N$ onderstelt, hetgeen zonder beperking der algemeenheid kan geschieden. Dan zijn niet alleen $a_1, a_2, \dots$ natuurlijke getallen, maar ook $r_0, r_1, r_2, \dots$, behalve de laatste. Hierboven hebben we bedoelde onderstelling niet gemaakt om de overeenstemming met de algorithmus in K beter te doen uitkomen. Nu dan de algorithmus in K :

Zij $p \in K$ en $q \in K$. We stellen

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}, \text{ dus } p = a_0 q + r_0 \quad (a_0 \in K, r_0 \in K, \frac{r_0}{q} \in E).$$

We merken op dat bij $\frac{p}{q}$, op grond van (1), precies één $a_0 \in K$ bestaat, zo, dat $\frac{p}{q} \in E_{a_0}$, dus $\frac{p}{q} - a_0 \in E$; d.w.z., a_0 is door $\frac{p}{q}$ ondubbelzinnig bepaald. Ook r_0 is dientengevolge ondubbelzinnig bepaald, terwijl $r_0 = p - a_0 q \in K$. De verzameling E vervult blijkbaar dezelfde rol als boven het vak $[0,1)$.

Als $r_0 = 0$, is $\frac{p}{q} = a_0$ en gaan we niet verder. Maar als $r_0 \neq 0$, stellen we

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \text{ dus } q = a_1 r_0 + r_1 \quad (a_1 \in H, r_1 \in K, \frac{r_1}{r_0} \in E),$$

waarbij

$$H = \{ae + \frac{b}{e} : a \in N, b \in N\}. \quad (2)$$

Immers, het is duidelijk dat $\cup \{E_c : c \in H\}$ juist dat deel van het complexe vlak omvat dat bestaat ^{uit} alle punten z met $|\arg z| \leq \frac{\pi}{3}$ die niet tot E behoren. Welnu, aangezien $\frac{r_0}{q} \in E$, geldt $|\arg \frac{q}{r_0}| = |\arg \frac{r_0}{q}| \leq \frac{\pi}{3}$, terwijl $\frac{q}{r_0} \notin E$. De verzameling H neemt nu dus de rol over van N .

Als, $r_1 = 0$, is $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1}$ en gaan we niet verder. Maar als $r_1 \neq 0$, stellen we

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \text{ dus } r_0 = a_2 r_1 + r_2 \quad (a_2 \in H, r_2 \in K, \frac{r_2}{r_1} \in E) \text{ etc..}$$

Het procédé breekt weer na een eindig aantal stappen af, daar opnieuw geldt $|q| > |r_0| > |r_1| > \dots$ en er ook maar eindig veel getallen in K zijn met absolute waarde kleiner dan $|q|$.

Vervangt men $\frac{p}{q}$ door λ , $\frac{r_0}{q}$ door λ_0 , $\frac{r_1}{q}$ door λ_1 etc., dan gaat de algorithmus over in

$$\lambda = a_0 + \lambda_0, \frac{1}{\lambda_0} = a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = a_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots \quad (3)$$

met $a_0 \in K$, $a_1 \in H$, $a_2 \in H$, $\dots$ en $\lambda_0 \in E$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \in E$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in E$, $\dots$

Hieruit volgt, aangenomen dat $\lambda_{n-1} \neq 0$ en $\lambda_n = 0$,

$$\lambda = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Dit is de zgn. "gewone kettingbreukontwikkeling" van $\frac{p}{q} = \lambda$, maar nu gerealiseerd in K i.p.v. in G . Voor deze kettingbreuk gebruiken we de notatie $[a_0, a_1, \dots, a_n]$.

3. De kettingbreukalgorithmus

De algorithmus (3) kan worden beschouwd als een generalisatie van de algorithmus van Euclides, in die zin, dat hij ook kan worden toegepast als λ niet rationaal is, namelijk, op een reële λ als we werken in G en op een complexe λ als we werken in K . Is λ irrationaal over G of K , dan breekt de algorithmus niet af, want uit de rationaliteit van een der quotienten $\frac{\lambda_v}{\lambda_{v-1}}$ volgt de rationaliteit van alle voorgaande, dus ook van λ ; en dit geval zou zich voordoen als voor zekere n zou gelden $\lambda_n = 0$.

Men ziet gemakkelijk in dat, indien λ reëel is, dan alle getallen $a_0, a_1, a_2, \dots$ en $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ reëel zijn, zodat $a_0 \in G$, $a_1 \in N$, $a_2 \in N, \dots$ en $0 \leq \lambda_0 < 1$, $0 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_0} < 1$, $0 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1, \dots$, zodat dan de kettingbreukontwikkeling in K dezelfde is als die in G . De eerste kan derhalve ook als

een generalisatie van de laatste beschouwd worden.

We noemen de getallen $a_1, a_2, \dots$ de wijzergetallen van de kettingbreuk en de kettingbreuken die we krijgen door eerder af te breken, namelijk, $[a_0]$, $[a_0, a_1]$, $[a_0, a_1, a_2]$, . . . , de naderende breuken. Tenslotte schrijven we

$$a'_0 = \lambda = a_0 + \lambda_0, \quad a'_1 = \frac{1}{\lambda_0} = a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \quad a'_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = a_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots \quad (3')$$

$$\text{Dan is } \lambda = [a'_0] = [a_0, a'_1] = [a_0, a_1, a'_2] = \dots$$

Voor het geval λ niet rationaal is rijst nu de vraag, welk verband er bestaat tussen λ en ^{de} op bovenstaande wijze ondubbelzinnig bepaalde rij van naderende breuken, in het bijzonder, of die rij convergeert en of zij dan λ tot limiet heeft. We zullen zien dat het antwoord bevestigend moet luiden zowel voor complexe als voor reële λ .

We merken op dat de keuze van E ter vervanging van het vak $[0, 1)$ bij de toepassing van de algorithmus van Euclides op K niet noodzakelijk en zelfs niet gebruikelijk is. Ook kan men bij de toepassing op G een ander vak kiezen, bijv. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, maar het gevolg hiervan zou zijn dat ook negatieve wijzergetallen zouden optreden. Het directe gevolg van onze keuze van E is dat de wijzergetallen alle behoren tot H .

4. De naderende breuken

We stellen de getallen voor door punten die we vastleggen met behulp van homogene coördinaten. Daartoe schrijven we $P_\infty = (1, 0)$ en $P_0 = (0, 1)$ en $\lambda = (\lambda, 1) = \lambda P_\infty + P_0 = P$.

We beschouwen de kettingbreukontwikkeling van λ zoals boven gegeven en onderstellen daarbij dat $\lambda_0 = \lambda \neq 0$, d.w.z., $a_0 = 0$.

We definieren punten $P_v = (p_v, q_v)$ en $P'_v = (p'_v, q'_v)$ door middel van de betrekkingen

$$P_v = P_{v-2} + a_v P_{v-1} \text{ en } P'_v = P_{v-2} + a'_v P_{v-1} \quad (v = 2, 3, \dots), \quad (4)$$

aangevuld met

$$P_1 = P_\infty + a_1 P_0 = (1, a_1) \text{ en } P'_1 = P_\infty + a'_1 P_0 = (1, a'_1). \quad (5)$$

We merken op dat de coördinaten van de punten door deze formules ondubbelzinnig zijn vastgelegd, maar dat punten met verschillende coördinaten kunnen samenvallen, namelijk, als de verhouding tussen de coördinaten dezelfde is.

Uit bovenstaande definities volgt $\forall v \in \mathbb{N} (\lambda_{v-1} \neq 0)$:

$$P = (\lambda, 1) = (\lambda_0, 1) = \lambda_0 P_\infty + P_0 = \lambda_v P_{v-1} + \lambda_{v-1} P_v = \lambda_{v-1} P'_v. \quad (6)$$

Immers, uit (3') volgt $1 = \lambda_0 a_1 + \lambda_1 = \lambda_0 a'_1$, dus

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_0 + \lambda_0 P_1 &= \lambda_1 P_0 + \lambda_0 (P_\infty + a_1 P_0) = \\ &= \lambda_0 P_\infty + (\lambda_0 a_1 + \lambda_1) P_0 = \lambda_0 P_\infty + P_0 = P \quad \text{en} \end{aligned}$$

$$\lambda_0 P'_1 = \lambda_0 (P_\infty + a'_1 P_0) = \lambda_0 P_\infty + \lambda_0 a'_1 P_0 = \lambda_0 P_\infty + P_0 = P.$$

Voorts volgt uit (3') $\lambda_{v-2} = \lambda_{v-1} a_v + \lambda_v = \lambda_{v-1} a'_v$ als $\lambda_{v-1} \neq 0$, dus, op grond van (4),

$$\begin{aligned} \lambda_v P_{v-1} + \lambda_{v-1} P_v &= \lambda_v P_{v-1} + \lambda_{v-1} (P_{v-2} + a_v P_{v-1}) = \\ &= \lambda_{v-1} P_{v-2} + (\lambda_{v-1} a_v + \lambda_v) P_{v-1} = \lambda_{v-1} P_{v-2} + \lambda_{v-2} P_{v-1} \quad \text{en} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{v-1}P'_v &= \lambda_{v-1}(P_{v-2} + a'_v P_{v-1}) = \\ &= \lambda_{v-1}P_{v-2} + \lambda_{v-1}a'_v P_{v-1} = \lambda_{v-1}P_{v-2} + \lambda_{v-2}P_{v-1}.\end{aligned}$$

Uit een en ander volgt onmiddellijk de juistheid van (6).

Uit (6) volgt dat de punten P'_v samenvallen met P , d.w.z.,
 $\frac{p'_v}{q'_v} = \lambda$ voor alle v met $\lambda_{v-1} \neq 0$. Indien $\lambda_v = 0$, dan is $P'_v = P_v$
 en $a'_v = a_v$, dus $\lambda = \frac{p_v}{q_v} = [0, a_1, \dots, a_v] = [0, a_1, \dots, a'_v]$. Maar
 hieruit kunnen we concluderen dat $\forall v \in \mathbb{N} (\lambda_{v-1} \neq 0)$:

$$[0, a_1, \dots, a_v] = \frac{p_v}{q_v}, \quad (7)$$

m.a.w., de punten P_v stellen de naderende breuken voor. En,
 omdat uit (4) en (5) volgt dat alle p_v en q_v geheel zijn (res-
 pectievelijk tot G of K behoren), hebben we in (7) een gewone
 breukvoorstelling van die naderende breuken.

De relaties (4) kunnen ook aldus worden geschreven:

$$\begin{pmatrix} p_{v-1} & p_v \\ q_{v-1} & q_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{v-2} & p_{v-1} \\ q_{v-2} & q_{v-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{v-1} & p'_v \\ q_{v-1} & q'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{v-2} & p_{v-1} \\ q_{v-2} & q_{v-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a'_v \end{pmatrix},$$

waaruit volgt, daar

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix},$$

$\forall n \in \mathbb{N} (\lambda_{n-1} \neq 0)$:

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \prod_{v=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_v \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} p_{n-1} & p'_n \\ q_{n-1} & q'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a'_n \end{pmatrix} \cdot \prod_{v=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_v \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Dit impliceert

$$p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = p_{n-1}q'_n - q_{n-1}p'_n = (-1)^n, \quad (9)$$

dus

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} \cdot q_n} \quad \text{en} \quad \lambda - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} \cdot q_n}. \quad (10)$$

Uit (9) volgt dat de breuken $\frac{p_v}{q_v}$ in (7) onvereenvoudigbaar zijn.

Indien λ reëel is en $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ dus behoren tot het reële vak $[0, 1)$, terwijl $a_1, a_2, \dots$ dan natuurlijke getallen zijn (zie paragraaf 3), dan volgt uit (4) en (5) dat $\forall n \in \mathbb{N} (\lambda_{n-1} \neq 0)$:

$$q'_n \geq q_n > q_{n-1} > \dots,$$

zodat, voor het geval λ bovendien irrationaal is, $q_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$. Dus volgt in dit geval uit (10) dat de rij der naderende breuken inderdaad convergeert met limiet λ .

5. De convergentie van de kettingbreukontwikkeling in K

Zij λ irrationaal over K en zij opnieuw $a_0 = 0$, dus $\lambda_0 = \lambda$. Het laatste beperkt de algemeenheid niet, daar a_0 alleen invloed heeft op de tellers p_n en niet op de noemers q_n van de naderende breuken en het alleen de noemers zijn die het verschil tussen λ en die naderende breuken bepalen.

Nu is

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left| \arg \frac{q_n}{q_{n-1}} \right| \leq \frac{\pi}{3}. \quad (12)$$

Want $\left| \arg \frac{q_1}{q_0} \right| = \left| \arg a_1 \right| \leq \frac{\pi}{3}$ (alle wijzergetallen behoren tot H) en, aangezien op grond van (4) voor $n = 2, 3, \dots$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}},$$

volgt uit $\left| \arg \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \right| = \left| \arg \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \right| \leq \frac{\pi}{3}$, dat ook $\left| \arg \frac{q_n}{q_{n-1}} \right| \leq \frac{\pi}{3}$, omdat $\left| \arg a_n \right| \leq \frac{\pi}{3}$. Door volledige inductie volgt dus de juistheid van (12).

Ook is

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left| \arg \frac{q'_n}{q_{n-1}} \right| \leq \frac{\pi}{3}. \quad (12')$$

Immers, op grond van (4) geldt voor $n = 2, 3, \dots$

$$\frac{q_n'}{q_{n-1}'} = a_n' + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}'},$$

terwijl eveneens $|\arg a_n'| \leq \frac{\pi}{3}$; en voor $n = 1$ geldt $\frac{q_1'}{q_0'} = a_1'$.

We gebruiken enige hulpstellingen:

Lemma 1 Indien $|A| \leq \frac{\pi}{3}$, $|B| \leq \frac{\pi}{3}$, $|C| \leq \frac{\pi}{3}$ met reële A , B en C , dan is $S = \cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) \geq 0$.

Bewijs Zonder beperking der algemeenheid mogen we $A \geq B \geq C$ onderstellen. We schrijven $A - B = X$, $B - C = Y$ en $A - C = Z$. Dan geldt $X \geq 0$, $Y \geq 0$, $\frac{2\pi}{3} \geq Z = X + Y$ en

$$\begin{aligned} S &= \cos X + \cos Y + \cos Z = \\ &= 2 \cos \frac{X+Y}{2} \cos \frac{X-Y}{2} + \cos Z \geq \\ &\geq 2 \cos \frac{X+Y}{2} \cos \frac{X+Y}{2} + \cos Z = \\ &= 2 \cos^2 \frac{Z}{2} + \cos Z = 2 \cos \frac{Z}{2} + 1 \geq -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Lemma 2 Indien a , b en c complexe getallen zijn met $\arg a = A$, $\arg b = B$ en $\arg c = C$, zodanig, dat A , B en C voldoen aan de voorwaarden van lemma 1, dan is

$$|a + b + c|^2 \geq 3 \min \{|ab|, |bc|, |ca|\}.$$

Bewijs

$$\begin{aligned} |a + b + c|^2 &= (|a| \cos A + |b| \cos B + |c| \cos C)^2 + \\ &\quad + (|a| \sin A + |b| \sin B + |c| \sin C)^2 = \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2|ab| \cos(A - B) + \\ &\quad + 2|bc| \cos(B - C) + \\ &\quad + 2|ca| \cos(C - A) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(|a| - |b|)^2 + \frac{1}{2}(|b| - |c|)^2 + \frac{1}{2}(|c| - |a|)^2 + \\
 &\quad + |ab|(1 + 2\cos(A - B)) + \\
 &\quad + |bc|(1 + 2\cos(B - C)) + \\
 &\quad + |ca|(1 + 2\cos(C - A)) \geq \\
 &\geq (3 + 2\cos(A-B) + 2\cos(B-C) + 2\cos(C-A)) \cdot \min\{|ab|, |bc|, |ca|\} \geq \\
 &\geq 3\min\{|ab|, |bc|, |ca|\} \quad (\text{het laatste op grond van lemma 1}).
 \end{aligned}$$

Lemma 3 Indien a , b en c aan dezelfde voorwaarden voldoen als in lemma 2, dan geldt ook

$$|abc + a + b|^2 \geq 3|ab| \cdot \min\{|ac|, |bc|, 1\}$$

en

$$|ac + bc + 1|^2 \geq 3|c| \cdot \min\{|abc|, |a|, |b|\}.$$

Bewijs Volgt onmiddellijk uit lemma 2 door te schrijven

$$|abc + a + b| = |ab| \cdot \left|c + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right|, \quad |ac + bc + 1| = |c| \cdot |a + b + \frac{1}{c}|.$$

Lemma 4 Indien a en b complexe getallen zijn met $\arg a = A$ en $\arg b = B$, zodanig, dat $|A - B| \leq \frac{2\pi}{3}$, dan geldt

$$|a + b|^2 \geq |ab|.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Bewijs} \quad |a + b|^2 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|\cos(A - B) \geq \\
 &\geq |a|^2 + |b|^2 - |ab| = \\
 &= (|a| - |b|)^2 + |ab| \geq |ab|.
 \end{aligned}$$

Lemma 5 Indien a en b aan dezelfde voorwaarden voldoen als in lemma 4, dan is $\max\{|a + b|, |\frac{1}{a} + \frac{1}{b}|\} \geq 1$.

Bewijs Volgens lemma 4 is $|\frac{1}{a} + \frac{1}{b}|^2 \geq \frac{1}{|ab|}$.

We stellen $\forall n \in \mathbb{N}$: $M_n = \min\{|q_{n-1}|, |q_n|\}$. Dan is

$$M_n \geq M_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (13)$$

Want, als $|q_{n-1}| < |q_{n-2}|$, dan is volgens (4), (12) en lemma 4

$$\left| \frac{q_n}{q_{n-1}} \right|^2 = \left| a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \right|^2 \geq |a_n| \cdot \left| \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \right| > 1,$$

terwijl, indien $|q_{n-2}| \leq |q_{n-1}|$,

$$\left| \frac{q_n}{q_{n-2}} \right|^2 = \left| a_n \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} + 1 \right|^2 \geq |a_n| \cdot \left| \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \right| \geq 1.$$

We beweren dat ook

$$M_n \geq M_{n-3} \sqrt{3} \quad (n = 4, 5, \dots). \quad (14)$$

Want, op grond van (4) geldt

$$q_{n-1} = a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3} = a_{n-1}a_{n-2}q_{n-3} + a_{n-1}q_{n-4} + q_{n-3},$$

zodat, indien $|q_{n-4}| < |q_{n-3}|$, volgens (12) en lemma 3

$$\left| \frac{q_{n-1}}{q_{n-4}} \right|^2 = \left| a_{n-1}a_{n-2} \cdot \frac{q_{n-3}}{q_{n-4}} + a_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-4}} \right|^2 \geq 3$$

en, indien $|q_{n-3}| < |q_{n-4}|$,

$$\left| \frac{q_{n-1}}{q_{n-3}} \right|^2 = \left| a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-1} \cdot \frac{q_{n-4}}{q_{n-3}} + 1 \right|^2 \geq 3,$$

waaruit volgt dat $|q_{n-1}| \geq M_{n-3} \sqrt{3}$. Aangezien dan ook geldt

$|q_n| \geq M_{n-2} \sqrt{3} \geq M_{n-3} \sqrt{3}$, volgt hieruit het gestelde.

Uit (10) en (14) volgt de convergentie van de rij der naderende breuken van onze kettingbreukontwikkeling. Dat de

limiet van die rij inderdaad gelijk is aan λ , volgt eveneens

uit (10) en (14), daar voor $n = 2, 3, \dots$ geldt $|q'_n| \geq M_{n-1}$.

Immers, $q'_n = a'_n q_{n-1} + q_{n-2}$, zodat voor het geval $|q_{n-1}| < |q_{n-2}|$

$$\left| \frac{q'_n}{q_{n-1}} \right| = \left| a'_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \right|,$$

terwijl voor het geval $|q_{n-2}| \leq |q_{n-1}|$

$$\left| \frac{q'_n}{q_{n-2}} \right| = \left| a'_n \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} + 1 \right|.$$

In beide gevallen krijgen we op grond van lemma 4 een uitkomst groter dan 1, omdat $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}} \in E$ en $a'_n = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}}$, dus $|a'_n| > 1$.

6. Approximatiestellingen

Uit het voorgaande volgen enige resultaten met betrekking tot de benadering van irrationale getallen door rationale.

We beweren:

Bij ieder reëel of complex getal λ bestaan oneindig veel breuken $\frac{p}{q}$ met $p \in G$ en $q \in G$, resp. $p \in K$ en $q \in K$, zodanig, dat

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{|q|^2}.$$

De bewering is evident voor rationale λ , zodat we ons tot irrationale λ kunnen beperken.

In het reële geval volgt de juistheid van de bewering uit het feit dat iedere naderende breuk van λ klaarblijkelijk aan de gestelde eis voldoet, namelijk, op grond van (10) en de ongelijkheid $q'_n = a'_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} > 0$.

In het complexe geval voldoet van elke twee opeenvolgende naderende breuken van λ tenminste één aan de voorwaarde

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|^2}.$$

Uit (4) en (3') volgt namelijk voor $n = 2, 3, \dots$

$$q'_n - q_n = q_{n-1}(a'_n - a_n) = \frac{q_{n-1}}{a_{n+1}}, \text{ dus } \frac{q'_n}{q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Uit (4) volgt echter ook $q'_{n+1} = a'_{n+1} q_n + q_{n-1}$, dus

$$\frac{q'_{n+1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + a'_{n+1}.$$

Toepassing van lemma 5 geeft nu, dat of $|q'_n| \geq |q_{n-1}|$, of $|q'_{n+1}| \geq |q_n|$, of aan beide ongelijkheden is voldaan, waaruit het boven gestelde volgt.

In het reële geval hebben we de volgende verscherping:

Bij ieder reëel getal λ bestaan oneindig veel reële breuken $\frac{p}{q}$, zo, dat

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2 \sqrt{5}}.$$

Dit volgt hieruit dat van elke drie opeenvolgende naderende breuken van λ tenminste één aan de gestelde voorwaarde voldoet.

Ten einde dit aan te tonen merken we op dat volgens (6)

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \lambda_{n-1} q'_n = 1, \quad (15)$$

zodat op grond van (10)

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \left| \lambda - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{|\lambda_{n-1}|}{|q_{n-1}|} = \frac{|\lambda_{n-1} q_{n-1}|}{|q_{n-1}|^2}. \quad (16)$$

We stellen $\forall n \in \mathbb{N}: \lambda_{n-1} q_{n-1} = \delta_{n-1}$. Het is duidelijk dat in

het reële geval $\forall n \in \mathbb{N}: \delta_{n-1} \geq 0$, waarbij het gelijkteken slechts kan optreden als λ rationaal is.

Veronderstel nu dat δ_{n-1} , δ_n en δ_{n+1} groter zijn dan $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Uit (6) volgt dat op grond van de definities

$$\forall n \in \mathbb{N}: \lambda_n q_{n-1} + \lambda_{n-1} q_n = 1, \quad (17)$$

dus

$$\delta_n \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} + \delta_{n-1} \cdot \frac{q_n}{q_{n-1}} = 1,$$

zodat

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n-1}} < \sqrt{5}.$$

Hieruit volgt

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < \frac{q_{n-1}}{q_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Dezelfde ongelijkheden gelden echter ook voor $\frac{q_{n+1}}{q_n}$, zodat

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} - \frac{q_{n-1}}{q_n} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = 1,$$

dus $q_{n+1} - q_{n-1} < q_n$, d.w.z., $q_{n+1} < q_n + q_{n-1}$, in strijd met

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1}.$$

Nemen we aan dat oneindig veel wijzergetallen groter dan 1 zijn, dan kunnen we zelfs het bestaan van oneindig veel breuken die voldoen aan de voorwaarde met $\sqrt{3}$ i.p.v. $\sqrt{5}$ aantonen. Het bewijs kan op dezelfde wijze worden gevoerd door te veronderstellen dat δ_{n-1} , δ_n en δ_{n+1} groter dan $\frac{1}{\sqrt{8}}$ zijn, terwijl $a_{n+1} \geq 2$. Dan volgt namelijk dat $q_{n+1} - q_{n-1} < 2q_n$, d.w.z., $q_{n+1} < 2q_n + q_{n-1}$, in strijd met $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq 2q_n + q_{n-1}$.